7.
Circunferencia*

1. Dada la recta $3x - 4y = 12$. Halla los vértices del triángulo que determina con los ejes de coordenadas.

   a) Determina las ecuaciones de cada una de las tres mediatrices del triángulo y el punto donde se cortan (circuncentro).

   b) Determina las ecuaciones de cada una de las tres bisectrices del triángulo y el punto donde se cortan (incentro).

2. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-5, 6)$ y radio $\sqrt{3}$.

3. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(5, -2)$ y que pasa por el punto $(8, -4)$.

4. Determina el centro, el radio y los puntos de corte con los ejes de las circunferencias:

   a) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$.
   b) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.
   c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.
   d) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.
   e) $x^2 + (y-3)^2 = 9$.
   f) $-x^2 - y^2 + 5x + 12 = 0$.
   g) $x^2 + y^2 - 6y = 0$.
   h) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.
   i) $2x^2 + 2y^2 - 12y - 14 = 0$.
   j) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

5. Comprueba si las ecuaciones siguientes definen una circunferencia.

   a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$.
   b) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 41 = 0$.
   c) $4x^2 + 4y^2 + 4x + 16y + 25 = 0$.
   d) $x^2 - y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$.

6. Halla la circunferencia de centro $(1, 5)$ que es tangente a la recta $2x + 3y - 2 = 0$.

7. Halla la recta tangente a la circunferencia
   $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$,
   en el punto de la misma que tiene de abscisa 1.

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

8. Explica la posición relativa de la recta y la circunferencia en cada caso. Cuando sea posible encuentra los puntos comunes.

   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0; \quad 2x + 2y - 3 = 0.$
   b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5; \quad 3x - y + 5 = 0.$
   c) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 4; \quad 2x + 7y - 8 = 0.$

9. Encuentra los valores de n para que la recta $x - y + n = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Determina el punto de tangencia para esos valores de n.

10. Estudia la posición relativa de las circunferencias. Cuando sean tangentes o secantes, encuentra el punto de tangencia o los puntos de intersección.

    a) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4; \quad (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10.$
    b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0; \quad x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0.$
    c) $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0; \quad (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1.$
    d) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 2; \quad (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 2.$
    e) $x^2 + y^2 + 6y = 0; \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0.$

11. Encuentra la circunferencia que pasa por el punto $(0, 3)$ y es concéntrica con $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$.

12. Determina la potencia del punto $(5, 2)$ respecto a las circunferencias indicando la posición relativa del punto respecto a ellas.

    a) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25.$
    b) $x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0.$

13. Determina la potencia de los puntos siguientes con respecto a la circunferencia $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$, indicando su posición relativa con respecto a ella.

    a) $(3, 2)$.
    b) $(5, -2)$.
    c) $(10, -2)$.
    d) $(5, 7)$.
    e) $(4, 5)$.

14. Encuentra el eje radical de las circunferencias del ejercicio 10.

15. Encuentra la circunferencia que pasa por el punto $(3, 3)$ y es tangente a los ejes de coordenadas.

16. Encuentra la circunferencia tangente a la recta $x + 2y = 4$ y a los ejes de coordenadas.

17. Dada la circunferencia $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$. Halla r en los siguientes casos:

    a) Para que pase por el punto $(3, 4)$.
    b) Para que sea tangente a la recta $x + y - 3 = 0$
    c) Para que el punto $(5, 6)$ tenga potencia 3 respecto a ella.
    d) Para que sea tangente interior con la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

18. Encuentra el punto que tiene la misma potencia con respecto a las tres circunferencias:

    $x^2 + (y - 3)^2 = 9, \quad (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4,$
    $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$

19. Dados los puntos $A(3, 5)$ y $B(-1, 2)$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano P, tales que: $\dfrac{d(A, P)}{d(B, P)} = 3.$

20. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano P, tales que el cociente de las distancias a las rectas $x - y = 0$; $x + y = 5$ sea 2.

21. Encuentra la ecuación de las tangentes a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$; desde el punto exterior $(0, 4)$.

22. Determina el valor de m para que la recta $y = mx+3$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+3 = 0$.

23. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por $(4, 2)$ y además es tangente a la recta $y = 2x + 2$ en el punto $(1, 4)$.

24. Halla el área del cuadrilátero determinado por los centros y los puntos de intersección de las circunferencias: $x^2 + (y-4)^2 = 10, \quad (x-5)^2 + (y-9)^2 = 20$.

25. Halla el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$.

26. Halla la ecuación de todas las circunferencias que son tangentes a los dos ejes de coordenadas en el primer cuadrante. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos más altos de cada una de estas circunferencias?

27. Dada la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 9$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.

    a) Explica su posición relativa. b) Encuentra las tangentes a la circunferencia que son paralelas a la recta anterior.

28. Dada la ecuación: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + K = 0$:

    a) Encuentra los valores de K para los que la ecuación define una circunferencia.
    b) Halla el valor de K para que pase por el origen de coordenadas.
    c) Halla el valor de K para que sea tangente al eje OX.
    d) Halla el valor de K para que sea tangente al eje OY.

29. Encuentra la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por las rectas: $3x + 4y = 5, \quad y = \dfrac{12}{5}x$, $y = 1$.

30. Determina el lugar geométrico de los puntos desde los que se observa el segmento de longitud 1 bajo un ángulo de $60°$.

31. Encuentra el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(3, 5)$ y $B(-1, 2)$ sea igual a 50.

32. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(4, 3)$ y es tangente a las rectas
$$r: \; y = x, \qquad s: \; 3x + 3y = 12.$$

33. Determina la ecuación de las tangentes comunes a las dos circunferencias: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 25 = 0$.

34. Dada la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$, determina la cuerda con menor longitud que podemos trazar de manera que sea tangente a la circunferencia:
$$x^2 + y^2 - 10x - 18y + 86 = 0.$$